Un acercamiento a los problemas inversos en ecuaciones diferenciales

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESTUDIANTE: GUADALUPE MARTÍNEZ ORTEGA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

ASESORA: DRA. ROSA MARGARITA ÁLVAREZ GONZÁLEZ

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

RESUMEN

El mal planteamiento es una característica recurrente en algunos problemas inversos del tipo de estimación de parámetros, en particular en ecuaciones diferenciales, tema relevante en distintas aplicaciones. En este contexto es que analizo dos ejemplos de estudio, uno en ecuaciones diferenciales ordinarias y otro en ecuaciones diferenciales parciales, donde se muestra la sensibilidad de la solución ante presencia de perturbaciones, ya sea en los datos o en las condiciones iniciales del problema.

Los resultados de este trabajo se obtuvieron con el estudio realizado en el Proyecto de Modelación II (curso del ciclo superior de la Licenciatura en Modelación Matemática).

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN CON PERTURBACIÓN EN LA CONDICIÓN INICIAL

Dada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x}$$

Con las condiciones

$$u(0,t) = u(1,t)$$
$$u(x,0) = x + 1$$
$$\alpha = -0.003$$

Podemos escribir la solución como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha (n\pi)^2 t} \operatorname{sen} n\pi x$$

Pero si introducimos una perturbación en la condición inicial del tipo $\frac{1}{m sen(m\pi x)}$ no podemos construir una solución analítica porque aparece una integral que no converge.

Para poder comparar entonces el error en la solución al introducir esta perturbación, desarrollamos un ejercicio numérico para ciertos valores de los parámetros que intervienen y mostramos los resultados en las siguientes gráficas.

PERTURBACIONES EN LA CONDICIÓN INICIAL
0.2942
0.2135
1.4478
0.1247
0.0978
0.0909
0.1247
0.2135
1.4478
0.2942

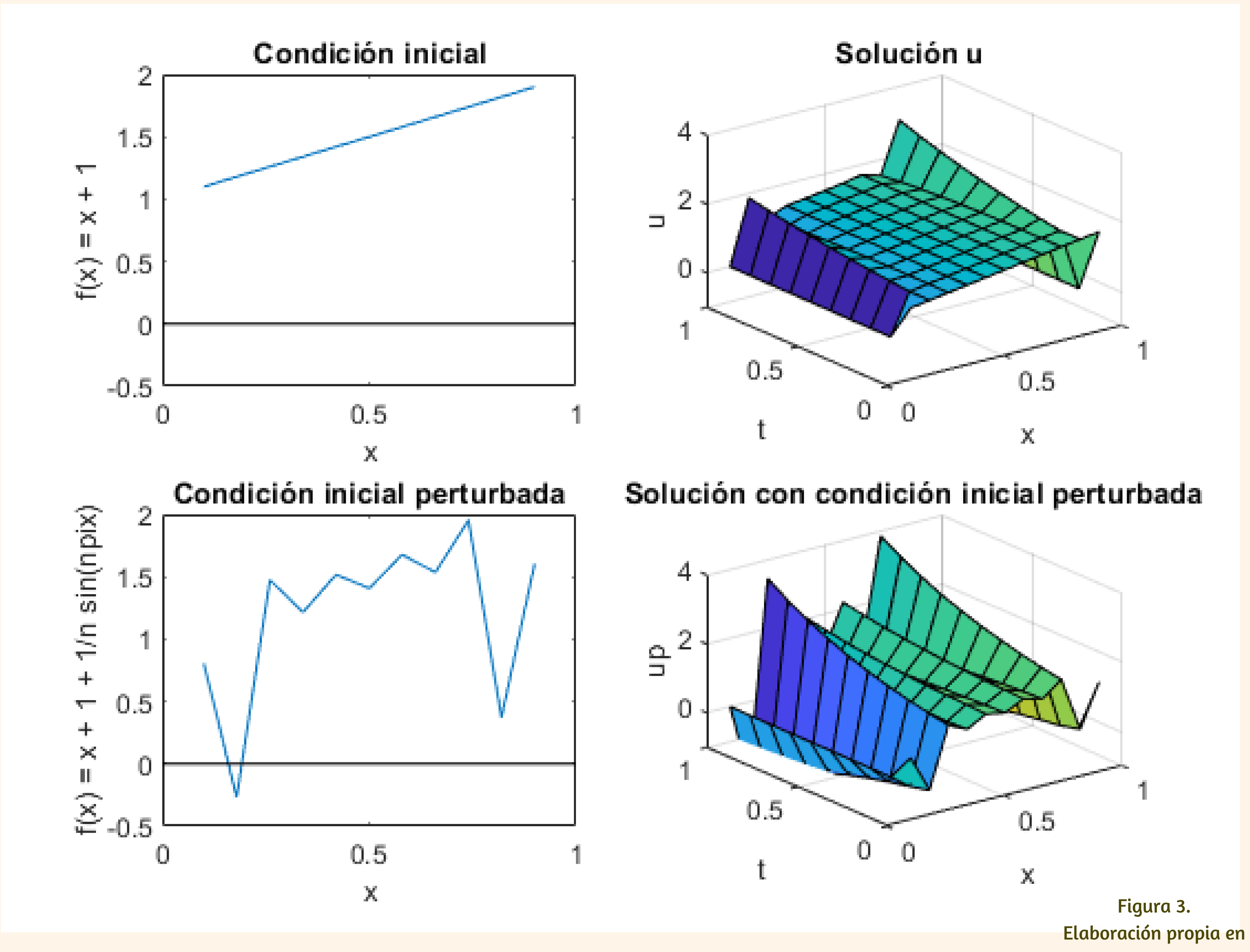

Figura 3.
Elaboración propia en Matlab

Utilizamos la norma euclidiana para medir el "tamaño" de la perturbación en la condición inicial y el resultado obtenido es igual a 2.1249.
Por otro lado realizamos el mismo procedimiento para medir el "tamaño" del error en la solución perturbada respecto de la no perturbada obteniendo un error de 13.3533.

PROBLEMA DE ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

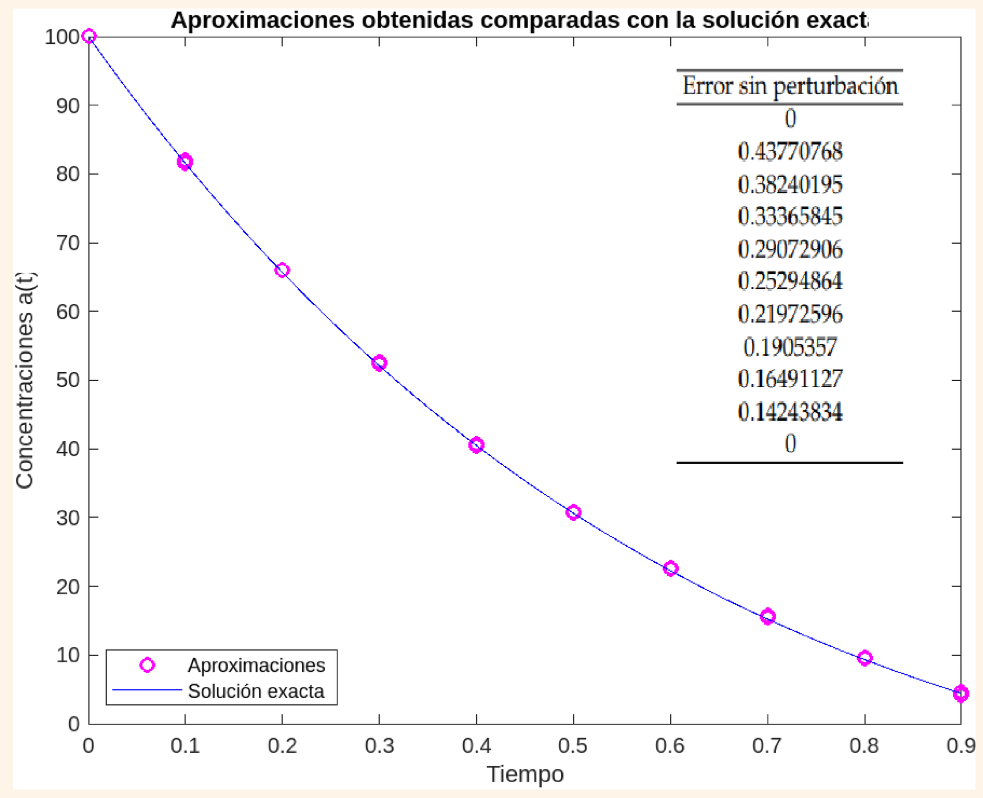

Figura 1.
Elaboración propia en Matlab

Para conocer la concentración de un soluto en diferentes intantes de tiempo utilizamos la siguiente ecuación diferencial

$$c'(t) = \frac{r}{V}(a - c)$$

En este ejemplo conocemos la solución c(t)

$$c(t) = te^{-t}$$

por lo que el problema es estimar el parámetro a(t)

$$a(t) = 100e^{-t} - 99te^{-t}$$

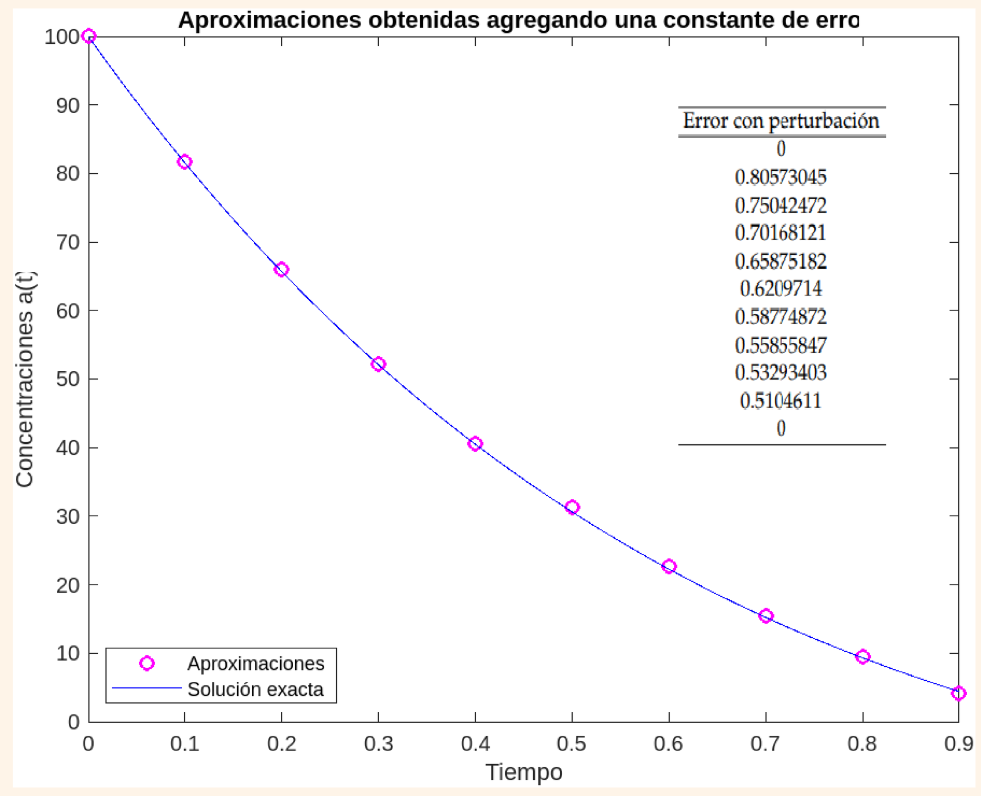

Figura 2.
Elaboración propia en Matlab

En este caso, podemos construir la expresión analítica para a(t) y compararla con los cálculos númericos, que mostramos en estas dos gráficas.

CONCLUSIONES

- Logramos un análisis númerico y gráfico de los problemas mal condicionados en nuestros ejemplos de estudio.
- Pudimos ver que aunque un problema tenga solución única no garantiza que la solución del problema se pueda obtener computacionalmente en forma estable
- Hemos sentado las bases para trabajar con ecuaciones diferenciales parciales, en particular la ecuación de flujo en medios porosos, con la finalidad de continuar este trabajo para que forme parte del trabajo de tesis.

REFERENCIAS

- Bear. (1997). Modeling groundwater flow and pollution. Springer.
- Groetsch, C. W. (1999b). Inverse Problems: Activities for Undergraduates. The Mathematical Association of America.
- López, G. (2013). Ecuaciones Diferenciales Parciales. Universidad Autónoma Metropolitana.

guadalupe.martinez.ortega@estudiante.uacm.edu.mx