Un modelo sencillo de filtración glomerular

Est. Fernanda Isabel[1], *Dr. Jorge López* [1], *Dr. Alejandro Peregrino*[1].

[1] *División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.*

Descripción del problema

La filtración glomerular es la primera de 3 etapas de la formación de la orina en el riñón. Se realiza en la nefrona, donde se encuentra el glomérulo. Este consiste en una red de capilares perituburales envueltos por la cápsula de Bowman. La presión arterial en los capilares empuja el agua y los solutos pequeños a través de una membrana de filtrado hacia la cápsula. La sangre no filtrada sale por otra arteriola eferente. Buscamos modelar esta filtración glomerular.

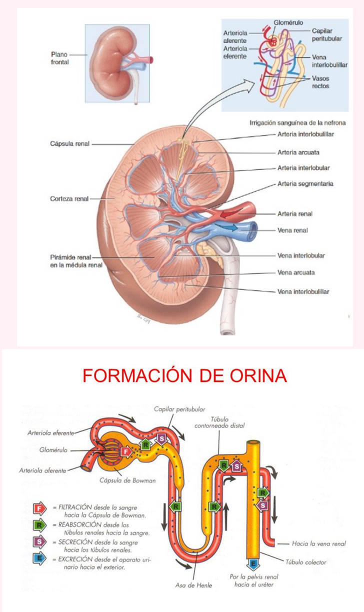

Figura 1. *Desarrollo anatómico del riñón con un enfoque en la estructura de la nefrona* ***(arriba)****. Esquema de las etapas de la formación de la orina en la nefrona* ***(abajo)****.*

El Modelo

Si suponemos que los capilares glomerulares son tubos unidimensionales con flujo q_1 y la cápsula de Bowman que los rodea tienen la misma forma y flujo q_2 (ver Figura 2). El filtrado glomerular ocurre a través de una pared capilar de longitud L (linea punteada de la Figura 2). El flujo en los capilares depende de la diferencia de presión a través de la pared capilar en estado estacionario. Por lo que la filtración se puede describir mediante una ecuación diferencial ordinaria con dos condiciones de frontera, lo que resulta en un problema de valor de frontera:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dx} = K_f(P_2 - P_1 + \pi_c(q_1)), & 0 < x < L, \\ q_1(0) = Q_a, \\ q_1(L) = Q_e, \end{cases}$$

donde

- P_1 es la presion hidrostática del fluido en el tubo 1 y ésta favorece la filtración. P_2 es la presion hidrostática del fluido en el tubo 2 y ésta se opone a la filtración.
- K_f es la tasa de filtración capilar.
- $\pi_c = \pi_i Q_a / q_1$, es la presión osmótica tanto de las proteínas suspendidas como de otras sustancias de alto peso molecular, que a su vez depende de la presión osmótica de entrada π_i y ésta se opone a la filtración.
- Q_a y Q_e son el flujo de entrada aferente y el flujo de salida eferente, respectivamente, son desconocidas y deben determinarse (esto hace que este problema sea no trivial).

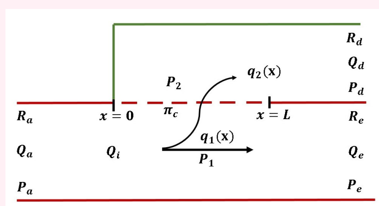

Figura 2 *Modelo tubular del glomérulo. L es la longitud del filtro.*

La filtración está controlada indirectamente por el flujo arterial aferente (Q_a, P_a, R_a) y el flujo arterial eferente (Q_e, P_e, R_e) vía

$$P_a - P_1 = R_a Q_a, \quad (2)$$

$$P_1 - P_e = R_e Q_e, \quad (3)$$

$$P_2 - P_d = R_d Q_d, \quad (4)$$

Aquí las letras $P, R,$ y Q son para presión, resistencia y flujo respectivamente y los subíndices $a, e,$ y d son para aferente, eferente y descendente, respectivamente. La solución general implícita es

$$\frac{1}{c_1}\left[q_1 - \frac{c_2}{c_1}\ln(c_1 q_1 + c_2)\right] = x + C, \quad (5)$$

donde c_1, c_2 son constantes. Usando la condición inicial $q_1(0) = Q_a$ se determina C y luego usando la condición final $q_1(L) = Q_e$, se obtiene

$$\frac{Q_e}{Q_a} + \alpha \ln\left[\frac{\frac{Q_e}{Q_a} - \alpha}{1 - \alpha}\right] = 1 - \frac{K_f \pi_i L}{\alpha Q_a}, \quad (6)$$

donde $\alpha = \frac{\pi_i}{(P_1 - P_2)}$. De aquí se obtiene Q_a y Q_e.

Solución numérica

(1) Consideramos valores típicos para los parámetros $P_e, \pi_i, R_e, R_a, R_d$ y damos un valor para Q_d. Debemos entonces determinar Q_a y Q_e, P_1, P_2, P_a y q_1. Dado el valor para Q_d podemos resolver (6) para Q_e y Q_a y resolver (2), (3), (4) para P_1, P_2 y P_a. Si repetimos el experimento para varios valores de Q_d, obtenemos por ejemplo la relación entre P_a y Q_d que se muestra en la Figura 3 (izquierda) donde tambien se muestra la gráfica de q_1 para un valor particular de Q_d (derecha).

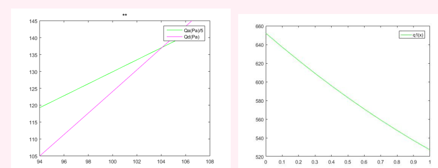

Figura 3 *Gráfica de $Q_a/5$ y Q_d contra P_a* ***(izquierda)****. Gráfica de la Curva $q_1(x)$ correspondiente a $Q_d = 125$. Para este caso, $Q_a = 652{,}1$ y $Q_e = 527{,}1$, $x \in [0, L]$* ***(derecha)****.*

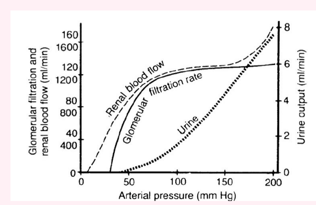

Figura 4. *Comportamiento real de Q_a y Q_d frente a P_a.*

Conclusiones

Para este modelo, la tasa de filtración Q_d varía linealmente en función de la presión arterial. Sin embargo, en la realidad (según los datos mostrados en la Figura 4, [1]), la tasa de filtración glomerular permanece relativamente constante incluso cuando la presión arterial varía entre 75 y 160 mm Hg, lo que sugiere que existe cierta autorregulación de la tasa de flujo.

Referencias

[1] James, K. and James, S. (2009). Mathematical Physiology Vol. II: Systems Physiology. Chapter 17: Renal Physiology, (821-850). Springer.

[2] Cooper, J. (2000). Introduction to partial Differential Equations with MATLAB. Birkhauser.